数理解析研究所講究録
631巻 1987年 43-54

或る連分数のg進展開におけるdigitsについて

国際短大　田村 純一 (Jun-ichi Tamura)

§0 序

正則連分数 (simple continued fraction) 展開とg進小数展開を同時にexplicitに表わせるような無理数については、殆ど知られていない。(Bundschu [2]) 連分数

$$[0; 1, g, g, g^2, g^3, g^5, g^8, \dots] \quad (2 \le g \in \mathbb{Z})$$

のg進展開が

$$(1) \qquad (g-1)\sum_{n=1}^{\infty} g^{-[\alpha n]}, \quad \alpha = (1+\sqrt{5})/2$$

で与えられることは、既に知られているが (Adams-Davison [1])、ここでは、その別証明を与える過程でg進小数のdigitsたちの間になりたつ興味深い事実について述べる。

§1 準備

数列 $\{u_n\}_{n=-1}^{\infty}$ は、

$$u_{-1}=0, \; u_0=1, \; u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

で決められる Fibonacci 数列とし，A_n は"再帰的"に

$$(1)\quad \begin{cases} A_{2n+2} = A_{2n},\ 3,\ A_{2n+1} \\ A_{2n+3} = A_{2n+1},\ 2,\ A_{2n+2} \end{cases} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

で定義される有限数列とする．但し $A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset$（$\emptyset$ は空集合）$A_4 = 3$，$A_5 = 2, 3$ とする．たとえば，

$$A_6 = A_4.\,3.\,A_5 = 3.\,3.\,2.\,3$$

$$A_7 = A_5.\,2.\,A_6 = 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3$$

となる．このとき，数列 A_n の長さは $u_{n-2} - 1$ となるので数列 A_n の和分

$$B_n = b_1^{(n)},\ b_2^{(n)},\ \cdots,\ b_{u_{n-2}}^{(n)}$$

を n の偶奇に従って $b_1^{(n)} = 0$ または 1 とおいて決めることができる．即ち，$n = 4, 5, 6, \cdots$ に対し

$$b_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(n)} + \begin{cases} 0 & (n:\text{偶数}) \\ 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

$$(a_k^{(n)} = \text{数列 } A_n \text{ の第 } k \text{ 項})$$

とする．また $B_0 = 0$，$B_1 = 1$．$B_2 = 0$，$B_3 = 1$（長さ1の数列）とする．このとき次が成りたつ：

$$(2)\quad b_{u_{n-2}}^{(n)} = u_n - 2 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

$$(3)\quad b_1^{(n)} + u_{n-1} - b_{u_{n-3}}^{(n-1)} = \begin{cases} 2 & (n:\text{偶数}) \\ 3 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

$$(4)\quad B_{n+1} = B_{n-1},\ B_n + u_{n-1}$$

(2) より (3)，(3) より (4) が出る．(4) の plus の記号は，

たとえば，$\mathcal{B}=2.5.7.10$ に対して，$\mathcal{B}+8=10.13.15.18$ 等となることを示し，(4)の右辺の comma は §1の(1)と同様の意味をもつ）

§2 連分数によって定義された関数 $\Theta(x)$.

この§以下，証明は一切省略する．まず，正則連分数 $[0;x^{u_{-1}}, x^{u_0}, x^{u_1}, x^{u_2}, \dots, x^{u_{n-2}}]$ で表わされる有理関数を $\theta_n(x)$ とし，

(5) $$\theta(x)=\lim_{n\to\infty}\theta_n(x)=[0;x^{u_{-1}}, x^{u_0}, x^{u_1}, \dots]$$

とおく．（$x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$ の時，上の極限は有限確定値をもつ）連分数(5)の第n近似分数を通常の記号で，$p_n(x)/q_n(x)$ とすると，p_n, q_n の回帰関係式より，帰納法で

(6) $$p_n(x)=\sum_{\substack{l=0\\ l\notin\mathcal{B}_n}}^{u_n-1} x^{l}, \quad q_n(x)=\sum_{l=0}^{u_n-1} x^{l}$$

が示される．ここで

$$\theta_n(x^{-1})=p_n(x^{-1})/q_n(x^{-1})=\Theta_n(x)$$

とおくと，

$$1-\Theta_n(x)=\Big(\sum_{l=0}^{u_n-1}x^{-l}-\sum_{\substack{l=0\\ l\notin\mathcal{B}_n}}^{u_n-1}x^{-l}\Big)\Big/\sum_{l=0}^{u_n-1}x^{-l}.$$

(2)より，有限数列 $\mathcal{B}_n$ の各項からなる集合は，$\{0,1,\dots,u_n-1\}$ に含まれることに注意して，

$$1-\Theta_n(x) = P_n(x)\,/\,Q_n(x),$$

$$P_n(x) = \sum_{l\in B_n} x^{u_n-1-l}, \quad Q_n(x) = \sum_{l=0}^{u_n-1} x^{l}$$

と書ける。そこで、数列 B_n の項を逆に並べかえた数列 $\overleftarrow{B_n}$ の各項の符号をかえた数列 $-\overleftarrow{B_n}$ を考え、

$$D_n' = -\overleftarrow{B_n} + u_n - 1$$

とおく。即ち、D_n' の第m項を $d_m^{(n)}$ とするとき、

$$d_j^{(n)} = -b_{u_{n-2}-j+1} + u_n - 1, \qquad (j = 1, 2, \cdots, u_{n-2})$$

となる。このとき、(2)より D_n' の初項は、n の偶・奇に関係なく常に1に等しい。今、D_n' の差分をとり、

$$C_n := \Delta D_n' := \{-b^{(n)}_{u_{n-2}-j} + b^{(n)}_{u_{n-2}-j+1}\}_{j=1}^{u_{n-2}-1}$$

とおくと、D_n' の作らえから、$C_n = \overleftarrow{A_n}$ で、

(7) $$1-\Theta_n(x) = \sum_{l\in D_n'} x^{l} \Big/ \sum_{l=0}^{u_n-1} x^{l}$$

がなりたつ。ここで ~~とおく~~、$\Delta D_n' = C_n$ は次をみたす：

(8) $$\begin{cases} C_{2n+4} = C_{2n+3},\ 3,\ C_{2n+2} \\ C_{2n+5} = C_{2n+4},\ 2,\ C_{2n+3}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

但し、$C_1 = C_2 = C_3 = \phi$, $C_4 = 3$, $C_5 = 3, 2$.

たとえば、$C_6 = 3, 2, 3, 3$

$C_7 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2$

$C_8 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, \underbrace{3, 2, 3, 3}$

等となる．数列 τ_{n+1} は数列 τ_n を"延長"したものであるから，$\tau_n = \{c_m\}_{m=1}^{u_{n-2}-1}$ と書ける．従って，

$$\tau = \lim \tau_n = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$$

が定義される．(7) で $n\to\infty$ として，

$$\begin{aligned} \Theta(x) &:= \lim_{n\to\infty} \Theta_n(x) \\ &= [0; 1, x^{-u_{-1}}, x^{-u_0}, x^{-u_1}, x^{-u_2}, \ldots] \qquad (9) \\ &= 1-(1-x)\sum_{l\in\mathcal{D}'} x^l \quad , \quad |x|<1 \end{aligned}$$

を得る．ここで $\mathcal{D}'$ は，τ の和分，i.e.,

$$\Delta\mathcal{D}' = \tau \quad \& \quad \mathcal{D}' \text{の初項} = 1$$

で与えられる無限数列である．

Polya - Carleson の定理を使えば関数 $\Theta(x)$ の自然境界は，単位円 $|x|=1$ であり，従って，$\Theta(x)$ は超越関数であることがわかる．$\Delta\mathcal{D}'$ の中に 1 が現われないことに注意して（$\Delta\mathcal{D}'=\tau$ は，2 と 3 だけからなる数列）(9) より次を得る：

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n \quad \text{としたとき,}$$

$$\sigma_0 = 1, \qquad \sigma_n = \begin{cases} -1 & (n\in\mathcal{D}') \\ +1 & (n\in\mathcal{D}'+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad n\geq 1. \qquad (10)$$

§3 $\Theta(g^{-1})$ の g 進展開．

(10) において，$x = 1/g$ $(2\leq g\in\mathbb{Z})$ を代入すれば，

$$\textcircled{H}(g^{-1}) = [0;1,g,g,g^2,g^3,g^5,g^8,\cdots]$$

$$(11) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} k_n g^{-n},$$

但し,

$$k_n = \begin{cases} k := g-1 & (n \notin D := D'+1) \\ 0 & (n \in D) \end{cases}$$

であることが導かれる. $\textcircled{H}_n(g^{-1})$ の g-進展開は, 周期が u_n の無限循環小数となるが, $\textcircled{H}(g^{-1})$ は, 無限正則連分数に等しいから, 勿論, 無理数であり, $\textcircled{H}(g^{-1})$ の g 進展開における digits $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, k と 0 のみからなる非周期的な無限列であることがわかる. 従って数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, 他に, どの様な性質を持っているか興味のあるところである. これについて以下に述べ, 併せて得られるいくつかの結果についても述べる.

§4 数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ について.

任意の正整数は, 隣接しない Fibonacci 数の和として, 一意的に書けることはよく知られている. 即ち, $0<n\in\mathbb{Z}$ に対し正整数 m 及び $u_{j_1},\cdots,u_{j_m}$ が一意的に決まり,

$$(B) \qquad n = \sum_{l=1}^{m} u_{j_l}$$

をみたす. 但し, $j_1>0$, $\underbrace{j_{l+1}-j_l>1}_{m>1\text{ の時は}}$ $(l=1,2,\cdots,m-1)$ とする. このとき, $j_1 = j_1(n)$ は n の関数と考えられる.

そこで, 次がなりたつ:

(12) $$\mathcal{D} = \{2+\sum_{k=1}^{n-1} c_k\}$$

$$= \{n \,;\, j_1(n) \equiv 0 \pmod 2\}$$

(注. 数列 $\mathcal{D}$ は単調列なので集合と同一視した)

(注. 空和 $\sum_{k=1}^{0} c_k = 0$ と考える)

(13) $$c_n = \begin{cases} 3 & (j_1(n) = \text{odd}) \\ 2 & (j_1(n) = \text{even}) \end{cases}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

これらと、(11)を併せて 数列 $\mathcal{C} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ と数列 $\mathcal{K} = \{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、文字の違いを除いて、本質的に同じ列であることがわかる。(つまり、$k(=g-1) \to 3$, $0 \to 2$ でできる2文字の置換によって、数列 $\mathcal{K}$ は数列 $\mathcal{C}$ に移る) 従って、$\Theta(g^{-1})$ の g 進小数表示は数列 $\mathcal{C}$ を書き下せば機械的に得られる：

(14) $$\mathcal{C} : 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, \cdots$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \cdots$$

$$\Theta(g^{-1}) = 0.k\,0\,k\,k\,0\,k\,0\,k\,k\,0\,k\,k\,0 \cdots$$

ここで数列 $\mathcal{C}$ は、"再帰接続関係" (8) より得られる。

ところで数列 $\mathcal{C}$ は、次の驚くべき性質(証明は(12)(13)から既に明らかであるが)を持っている：

(15) 数列 $\mathcal{C} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ の $(2+\sum_{k=1}^{n-1} c_k)$-番目の項は2に等しく、それ以外の項は3に等しい。

この(15)より数列 $\mathcal{C}$ が機械的に((8)を使わないで)求められる：

(15)′ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 …

$\mathcal{C}$: 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, …

$\mathcal{D}$: 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, …

説明：数列$\mathcal{C}$と数列$\mathcal{D}$の初項は、それぞれ3, 2とする。3行目の最初の数が2だから1行目の2に○印をつける。1行目の○印の下には2と書く。2行目の和分をとると2, 5, 7（3行目）が得られる。1行目の2, 5, 7に○印をつける。（2には既に○印がついているので、5と7だけに○印をつける）○印の下（2行目）に2と書いて既に○印のついている数より左にある1行目の無印の数の下には3と書き入れる。2行目の和分をとって3行目の2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20が得られる。1行目の~~7, 10, 13~~ 10, 13, 15, 18, 20に新しく○印をつける。以下同様にこれをくりかえす。

また、(8)より、数列$\mathcal{C}$は、substitution

$$T : \begin{cases} 3 \mapsto 3\ 2 \\ 2 \mapsto 3 \end{cases}$$

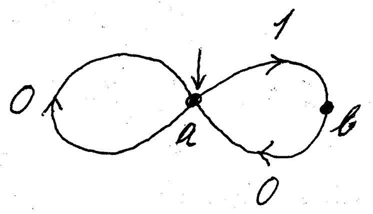
によって生成される：

(16) $3 \mapsto 3, 2 \to 3, 2, 3 \to 3, 2, 3, 3, 2 \to \cdots$

即ち、$\mathcal{C}$はconstant lengthでないsubstitutionによって書かれる"automaton"（pseudo-automaton）の生成

する列と考えられる．（実際また(13)に注意すれば，$\mathscr{C}$ は pseudo-automaton：

(17)



（注）2進法の代りに Fibonacci representation（§4，(B)）を使う．即ち $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ の代りに $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を base にとる．

によって生成される列
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ a. & b. & a. & a. & b. & a. & b. & \cdots & \\ (3. & 2. & 3. & 3. & 2. & 3. & 2. & \cdots &) \end{array}$$

と考えられる．

他方，次の正規連分数（regular continued fraction）

$$\Phi(x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^8}{1+x^{13}}}}}}}\quad , \ |x|<1$$

$\cdots$

（右辺の x の肩の数は Fibonacci 数）

で与えられる関数についても同様の結果を得る．たとえば，$k=g-1$ として，(14) に対応する結果：

(18)
$$\Phi(g^{-1}) = 0.0\underline{k0kk0k0}\cdots$$
$$\downarrow$$
$$\mathscr{C} : 2.1.2.2.1.2.1\cdots = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$$

（$\mathscr{C}$ は 2.1 の列として (8) と同様にして与えられる）

や，$(15)'$ に対応する結果：

(19) $\mathscr{E}$: ①, 2, ③, ④, 5, ⑥, 7, ⑧, ⑨, 10, ⑪

2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, …

$\mathscr{F}$: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, … $= \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$

等が示される. ところで, 連分数の直接の変形によって,

$$\Phi(x) = x\,\Psi(x)$$

であることが確められるから, (14), (18)より, 数列 $\mathscr{C} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ は, 数列 $\mathscr{K}$ を媒介にして 数列 $\mathscr{E} = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ と文字の違いを別にすれば, 同一の pattern を持っていることがわかる. 従って, 数列 $\mathscr{C}$ は

$$(20) \quad c_n = \begin{cases} 3 & \text{iff } n \in \mathscr{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty} \\ 2 & \text{iff } n \in \mathscr{D} = \{d_m\}_{m=1}^{\infty} \end{cases}$$

によって与えられることがわかる. ここで, (15)', (19), (20) より,

$$d_n = f_n + n$$

$$\mathscr{D} \cup \mathscr{F} = \mathbb{N}, \quad \mathscr{D} \cap \mathscr{F} = \emptyset$$

であることがわかる. これより $\mathscr{D}$ 及び $\mathscr{F}$ は $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ としたとき,

$$(21) \quad \begin{cases} d_n = [\alpha^2 n] \\ f_n = [\alpha n] \end{cases}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

~~が得られる~~ で与えられることがわかる. これより §0 の (A) ~~また~~ も導かれる.

また, 連分数の級数表示 (Euler's transformation) を用いれば, T_n を不定方程式の解の個数

$$T_n = \#\{(k, l, m) \in N^3 \,;\, u_{2m}\cdot(k-1) + u_{2m+1}\cdot l = n\}$$

で与えられる数としたとき,

$$\Theta(x)=\frac{1}{1+x}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{u_{2m+2}}}{(1-x^{u_{2m}})(1-x^{u_{2m+2}})}$$

(22)

$$=\frac{1}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}(T_n-2T_{n+1}+T_{n+2})x^n,\quad |x|<1$$

を得る。数列 $\{T_n-2T_{n+1}+T_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ は数列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ の差分を2回とったものであることに注意して、(9),(21)及び(22)を使えば、

(23) $$T_n=\frac{1}{2}n-\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}(n-1)\right]+\frac{1}{4}(-1)^{n-1}-\frac{3}{4}$$

$$\sim\frac{\sqrt{5}-2}{2}n$$

を得る。一般に、不定方程式

$$xx'+yy'=n$$

の正整数解の個数については、興味あるがこれに数論的な制限をつけて、解の個数を考えたものとしては、Tonkov の論文[4]などがある。

以上の諸結果のうち(16)については、M. Mendès France また、(14)については、C. Mauduit に教示を得たことを記し、併せて感謝の意を表する。

最後に、$\Theta(x)$ の値の超越性について述べる。既に見たように、$\Theta(x)$ は、級数

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{[\alpha n]},\quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と結びつけられるが、α を一般の2次無理数としたとき、$f_\alpha(g^{-1})$ ($2 \le g \in \mathbb{Z}$) が超越数であることは知られている。従って、勿論 Ⓗ(g^{-1}) も超越数である。最近 D.W. Masser が相異なる1より小さい代数的数たちを $f_\alpha(x)$ に代入した値たちの代数的独立性を示した。([3])
これに対して、finite pseudo-automaton によって与えられる数列を digits とする無限小数の超越性については、Ⓗ(g^{-1}) の他には、一般に何も知られていない。　文献：

1. Adams, W. W. and Davison, J. L. : A remarkable class of continued fractions, Proc. AMS vol. 65 No. 2 (1977), p. 194 –

2. Bundschu, P. : Über eine Klasse reeler Transzendenter Zahlen mit explizit angebbarer g-adischer und Kettenbruch-Entwicklung, Journal für die reine und angewandte Math. (Crelle) 318 (1980), p. 110 –

3. Masser, D. W. : An algebraic independence theorem (1-1)

4. Тонков, Т : Новые применения метода «стаканчиков» Виноградова, Труды математического института АН СССР (1984) том 163, p. 234 –